

Devoir sur Table 6

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1*(adapté de Oral CCINP PC 2019)*

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)$.

On considère les ensembles $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.

1. Pour tout t positif, montrer les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\operatorname{sh}(t) \geq t$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f et en déduire que f admet une infinité de points critiques
3. Déterminer la matrice hessienne de f et en déduire la ou les natures de ces points critiques
4. Montrer que f admet un minimum global nul sur $\mathbb{R}^2$.
5. Justifier que D est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$. En déduire que f admet un maximum sur D .
6. En déduire qu'il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.
7. On pose $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$, justifier que l'on peut limiter l'étude de g à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
8. Étudier les variations de g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
9. En déduire le maximum de f sur D .

Exercice 2*(Maths B PT 2022)*

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ usuels.

Soient a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On considère alors la conique $C_{a,b}$ d'équation : $ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x + y) = 4$.

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.
 - (a) Étudier la conique $C_{5,-3}$. On donnera en particulier :
 - une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,

- sa nature,
 - les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de son centre,
 - les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets.
- (b) Tracer la conique $C_{5,-3}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On utilisera la feuille de papier millimétré fournie et on prendra une unité de 4 cm.
2. Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $C_{a,b}$.
- On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 - 4(x+y) = 4$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in]0, 1[$ et $p_B \in]0, 1[$. On définit la variable aléatoire X par $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :
- $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,
 - $X = 0$ si $C_{A,B}$ est du type parabole,
 - $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.
3. *Détermination de la loi de X .*
- (a) Calculer $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p_A)^{k-1} (1-p_B)^{k-1}$.
- (b) Justifier que $\mathbb{P}(A+B=0) = 0$.
- (c) Justifier que $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A=B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A=k)\mathbb{P}(B=k)$.
- (d) En déduire que $\mathbb{P}(X=0) = \frac{p_A p_B}{p_A - p_A p_B + p_B}$.
- (e) Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathbb{P}(B > k) = (1-p_B)^k$.
- (f) En déduire que $\mathbb{P}(B > A) = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}$.
- (g) En déduire $\mathbb{P}(X=-1)$ puis $\mathbb{P}(X=1)$.
- (h) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .

Exercice 3

(Maths B PT 2014)

Soit A, B, C trois points de R^3 non alignés. On suppose que A, B et C appartiennent au plan d'équation $z = 0$. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , et on note $h = AH$.

$\hat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\hat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\hat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin(\hat{C})$, h et b .
2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $\widehat{ABC}$ en fonction de a et h .
3. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a, b et $\sin(\hat{C})$.
4. Montrer que : $\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$
5. Comparer $\|\vec{BC} \wedge \vec{AC}\|$, $\|\vec{BC} \wedge \vec{AH}\|$ et $\det(\vec{BC}, \vec{AC})$. Donner une interprétation en termes d'aires du résultat obtenu.
6. Exprimer AB^2 en fonction de a, b et $\cos(\hat{C})$.
7. Retrouver le résultat de la question 6. à l'aide du théorème de Pythagore.

Exercice 4

Une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ est appelé un cône positif s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall u \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad tu \in \Delta$$

Pour une fonction $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est α -homogène si

$$\forall u \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad f(tu) = t^\alpha f(u)$$

Le but de cet exercice est de prouver la formule d'Euler pour les fonctions homogènes de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f \text{ est } \alpha\text{-homogène} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

On notera $(\mathcal{E}_\alpha)$ l'équation

$$(\mathcal{E}_\alpha) : \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

1. Deux exemples

(a) Montrer que la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est 2-homogène et qu'elle vérifie l'équation $(\mathcal{E}_2)$

(b) Soit $\Delta_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $f : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Montrer que Δ_1 est un cône positif et que f est -1 homogène.

(c) On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Δ_1 . Déterminer ses dérivées partielles et vérifier que

$$\forall (x, y) \in \Delta_1, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -f(x, y)$$

On revient désormais au cas général.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Rappeler sans démonstration la formule donnant la dérivée de la fonction $\psi : t \mapsto f(x(t), y(t))$

3. Première implication

Soit f une fonction α -homogène sur Δ un cône positif et $(x_0, y_0) \in \Delta$. On pose $g : t \mapsto t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0)$

(a) Justifier que g est une fonction constante.

(b) Montrer que

$$\forall t > 0, \quad t^{-\alpha} \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) \right) = \alpha t^{-\alpha-1} f(tx_0, ty_0)$$

(c) En déduire que f vérifie $(\mathcal{E}_\alpha)$

4. Seconde implication

Soit désormais f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ un cône positif vérifiant l'équation $(\mathcal{E}_\alpha)$ et $(x_0, y_0) \in \Delta$

On pose de nouveau $g : t \mapsto t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0)$

(a) Calculer, pour $t > 0$, $g'(t)$ et montrer que g est constante

(b) En déduire que f est α -homogène.

5. Conclusion

6. Soit f une fonction α -homogène de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ un cône positif que l'on suppose ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont $(\alpha - 1)$ -homogènes.

(b) En déduire que f vérifie l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}_\alpha)$ suivante

$$(\tilde{\mathcal{E}}) : \quad \forall (x, y) \in \Delta, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha(\alpha - 1)f(x, y)$$

(c) Une fonction vérifiant $(\tilde{\mathcal{E}}_\alpha)$ est-elle nécessairement α -homogène ?

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. On considère la fonction $\varphi : t \mapsto t - \sin(t)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \geq 0$, $\varphi'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$.

φ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme $\varphi(0) = 0$ on en déduit que, pour tout $t \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$, i.e. $\sin(t) \leq t$.

On considère maintenant la fonction $\psi : t \mapsto \text{sh}(t) - t$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \geq 0$, $\psi'(t) = \text{ch}(t) - 1 \geq 0$.

ψ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme $\psi(0) = 0$ on en déduit que, pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) \geq 0$, i.e. $\text{sh}(t) \geq t$.

Finalement

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \sin(t) \leq t, \quad \text{et} \quad \text{sh}(t) \geq t}$$

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \text{sh}(2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \sin(2y)}$$

f admet un point fixe en (x, y) si et seulement si $2 \text{sh}(2x) = 0$ et $2 \sin(2y) = 0$ donc si et seulement si $x = 0$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $y = \frac{k\pi}{2}$.

Tous les points $\left(0, \frac{k\pi}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des points critiques, $\boxed{f \text{ admet donc une infinité de points fixes.}}$

3. On obtient, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 \text{ch}(2x) & 0 \\ 0 & 4 \cos(2y) \end{pmatrix}}$$

En particulier, pour $x = 0$ et $y = \frac{k\pi}{2}$ on obtient

$$H_f\left(0, \frac{k\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \cos(k\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4(-1)^k \end{pmatrix}$$

D'où $\text{Sp}\left(H_f\left(0, \frac{k\pi}{2}\right)\right) = \{4, (-1)^k 4\}$.

On en déduit que $\boxed{f \text{ atteint des minima locaux aux points } \left(0, \frac{k\pi}{2}\right) \text{ pour } k \text{ pair}}$ et que

$\boxed{\text{les points } \left(0, \frac{k\pi}{2}\right) \text{ sont des points selles de } f \text{ pour } k \text{ impair.}}$

4. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\text{ch}(2x) \geq 1$ et $-\cos(2y) \geq -1$, d'où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ch}(2x) - \cos(2y) \geq 0$$

De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$ pair, on a $f\left(0, \frac{k\pi}{2}\right) = 0$.

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un minimum global nul sur } \mathbb{R}^2.}$

5. D est la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, $\boxed{\text{il s'agit donc d'une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^2.}$

f est continue sur l'ensemble D qui est fermé et borné, d'après le théorème des bornes atteintes

$\boxed{f \text{ admet un maximum sur } D.}$

6. Si le maximum de f sur D est atteint un point intérieur (i.e. un point de D') alors il est atteint en un point critique.

Or, d'après les questions précédentes tous les points critiques de f correspondent à des minima globaux, ainsi le maximum ne saurait être atteint en un point de D' .

Il est donc atteint en un point de $D \setminus D' = \{(\cos(t), \sin(t)) , t \in [0, 2\pi]\}$.

Il existe donc $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que le maximum de f sur D soit égal à $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

7. On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \text{ch}(2\cos(\theta)) - \cos(2\sin(\theta))$.

D'où

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = \text{ch}(-2\cos(\theta)) - \cos(-2\sin(\theta)) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Par π -périodicité on va donc pouvoir restreindre notre étude à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

Par parité on va donc pouvoir restreindre notre étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Finalement on restreint l'étude de g à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$g'(\theta) = -2\sin(\theta) \text{sh}(2\cos(\theta)) + 2\cos(\theta) \sin(2\sin(\theta))$$

Comme $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin(\theta) \geq 0$ et donc, d'après la question 1., $-2\sin(\theta) \text{sh}(2\cos(\theta)) \leq -4\sin(\theta) \cos(\theta)$

De même $\cos(\theta) \geq 0$ et donc $2\cos(\theta) \sin(2\sin(\theta)) \leq 4\sin(\theta) \cos(\theta)$

D'où, pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $g'(\theta) \leq 0$.

g est donc décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ g atteint son maximum en $\theta = 0$. Ainsi le maximum de f sur D est atteint en $(\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$ et $(\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0)$.

Le maximum de f sur D vaut donc $f(1, 0) = f(-1, 0) = \text{ch}(2) - 1$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.

(a) $C_{5,-3}$ est la conique d'équation $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$

Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Sp}(A) = \{2, 8\}$.

Comme A a deux valeurs propres de même signe (au sens strict) $C_{5,-3}$ est « de type ellipse »

De plus $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_8(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Posons $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$. En notant (X, Y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on obtient alors

$$\begin{aligned} M \in C_{5,-3} &\Leftrightarrow 2X^2 + 8Y^2 - 4\sqrt{2}X = 4 \\ &\Leftrightarrow X^2 + 4Y^2 - 2\sqrt{2}X = 2 \\ &\Leftrightarrow (X - \sqrt{2})^2 + 4Y^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{(X - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation d'une ellipse de demi-grand axe 2 et de demi-petit axe 1.

L'équation réduite de notre ellipse dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est donc $\frac{(X - \sqrt{2})^2}{4} + Y^2 = 1$.

Son centre est le point de coordonnées $(\sqrt{2}, 0)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Son centre est donc le point Ω de coordonnées $(1, 1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

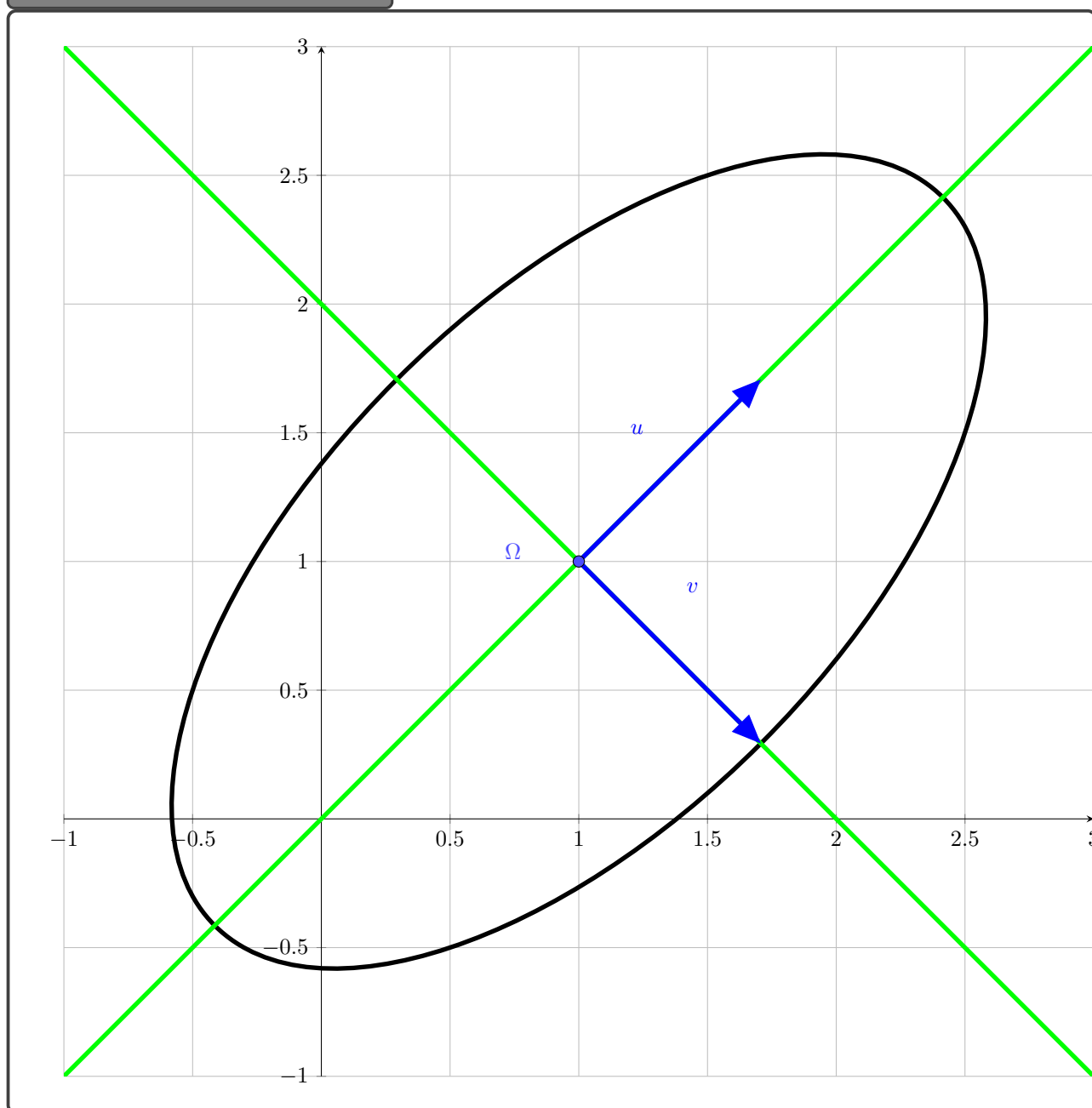
Ses sommets sont les points d'intersection de l'ellipse avec ses axes.

Il s'agit donc des points dont les coordonnées dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont

$$(\sqrt{2}, 1), \quad (\sqrt{2}, -1), \quad (\sqrt{2} + 2, 0), \quad (\sqrt{2} - 2, 0)$$

- (b) On place le centre, les axes propres de l'ellipse et les sommets (on peut pour cela s'aider du demi-grand axe et du demi-petit axe). on obtient le tracé suivant :

Figure .1 – Tracé de l'ellipse $C_{5,-3}$



2. La nature de la conique $C_{a,b}$ dépend des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Ces valeurs propres sont $a + b$ et $a - b$. On obtient donc le critère suivant

- Si $a + b$ et $a - b$ sont de même signe strict alors $C_{a,b}$ est de type ellipse
- Si $a = b$ ou $a = -b$ alors $C_{a,b}$ est de type parabole
- Si $a + b$ et $a - b$ sont de signes strictement opposés alors $C_{a,b}$ est de type hyperbole

On peut aussi reformuler cela de manière plus concise :

- Si $a^2 - b^2 > 0$ alors $C_{a,b}$ est de type ellipse
- Si $a^2 - b^2 = 0$ alors $C_{a,b}$ est de type parabole
- Si $a^2 - b^2 < 0$ alors $C_{a,b}$ est de type hyperbole

3. Détermination de la loi de X .

- (a) On reconnaît une série géométrique de raison $(1 - p_A)(1 - p_B) \in [0, 1[$, on a donc

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_A)^{k-1} (1 - p_B)^{k-1} = \frac{1}{1 - (1 - p_A)(1 - p_B)} = \frac{1}{p_A + p_B - p_A p_B}$$

- (b) A et B sont des variables aléatoires de lois géométriques, ainsi $A(\Omega) = B(\Omega)\mathbb{N}^*$.

On a donc $(A + B)(\Omega) \subset \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

En particulier $\mathbb{P}(A + B = 0) = 0$.

- (c) D'après la question 2. on l'égalité d'événements $[X = 0] = [A + B = 0] \cup [A = B]$.

D'où, comme $\mathbb{P}(A + B = 0) = 0$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(A + B = 0) + \mathbb{P}(A = B) - \mathbb{P}([A = B] \cap [A + B = 0]) = \mathbb{P}(A = B)$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([A = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ nous donne alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(A = B) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A = B, A = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k, B = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) \quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(A = B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k)$$

- (d) On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p_A (1 - p_A)^{k-1} p_B (1 - p_B)^{k-1} \\ &= p_A p_B \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_A)^{k-1} (1 - p_B)^{k-1} \\ &= \frac{p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B} \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B - p_A p_B}$.

(e) Soit $k \geq 1$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(B = j) \\ &= p_B \sum_{j=k+1}^{+\infty} (1 - p_B)^{j-1} \\ &= p_B \frac{(1 - p_B)^k}{1 - (1 - p_B)} \\ &= (1 - p_B)^k\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \geq 1, p(B > k) = (1 - p_B)^k.}$

(f) On utilise de nouveau la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([A = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B > A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B > A, A = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B > k, A = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B > k) \mathbb{P}(A = k) \quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p_B)^k p_A (1 - p_A)^{k-1} \\ &= p_A (1 - p_B) \sum_{k=1}^{+\infty} ((1 - p_B)(1 - p_A))^{k-1} \\ &= \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(B > A) = \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}.}$

(g) A et B sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, ainsi, $A + B \geq 2$ presque sûrement.

On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(X = -1) = p(A - B < 0) = \mathbb{P}(B > A) = \frac{p_A (1 - p_B)}{p_A - p_A p_B + p_B}}$$

puis, comme $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = -1) = \frac{p_B (1 - p_A)}{p_A - p_A p_B + p_B}}$$

(h) X est bornée donc admet bien une espérance, on a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1) = \frac{p_B - p_A}{p_A - p_A p_B + p_B}}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Dans le triangle CHA rectangle en H , pour l'angle $\widehat{C}$, l'hypoténuse est $CA = b$ et le coté opposé est $AH = h$ donc

le sinus de l'angle est $\sin(\widehat{C}) = \frac{h}{b}$

2. L'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur avec ici base = $CB = a$ et hauteur = $AH = h$ donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah$

3. La question 2. nous donne $h = b \sin(\hat{C})$ d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$

4. De manière similaire, en échangeant les rôles de A , B et C on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$

D'où, en divisant par $abc \neq 0$ on obtient

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Ce résultat porte le nom de loi des sinus.

5. On a

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{HC}$$

Or $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires d'où

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}$$

$$\text{Ainsi } \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\|$$

$$\text{De plus } \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sin(\hat{C})$$

$$\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{AH}\| \sin(\hat{C})$$

Comme le triangle ABC est direct, le triangle CBA est indirect, d'où On a $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{AC}\| (-\sin(\hat{C}))$

Ainsi

$$\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\| = -\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$$

$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ étant l'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$

6.

$$AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$\text{Or } \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = -ab \cos(\hat{C})$$

$$\text{Donc } AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

On pouvait aussi obtenir ce résultat à partir de la loi des sinus (i.e. le résultat de la question 4.) mais c'est plus long :

$$\begin{aligned} \sin(\hat{C}) &= \sin(\pi - \hat{A} - \hat{B}) \\ &= \sin(\hat{A} + \hat{B}) \\ &= \sin(\hat{A}) \cos(\hat{B}) + \sin(\hat{B}) \cos(\hat{A}) \\ &= \sin(\hat{C}) \left(\frac{a \cos(\hat{B}) + b \cos(\hat{A})}{c} \right) \end{aligned}$$

D'où, comme $\sin(\hat{C}) \neq 0$, on a

$$a \cos(\hat{B}) + b \cos(\hat{A}) = c$$

De plus

$$\begin{aligned}
 \cos(\widehat{C}) &= \cos(\pi - \widehat{A} - \widehat{B}) \\
 &= -\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) \\
 &= -\cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) + \sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B}) \\
 &= \frac{ab}{c^2} \sin(\widehat{C})^2 - \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B})
 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \left(a \cos(\widehat{B}) + b \cos(\widehat{A})\right)^2 \\
 &= a^2 \cos(\widehat{B})^2 + b^2 \cos(\widehat{A})^2 + 2ab \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) \\
 &= a^2 \left(1 - \sin(\widehat{B})^2\right) + b^2 \left(1 - \sin(\widehat{A})^2\right) + 2ab \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) \\
 &= a^2 + b^2 - \frac{2a^2b^2}{c^2} \sin(\widehat{C})^2 + 2ab \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B}) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{ab}{c^2} \sin(\widehat{C})^2 - \cos(\widehat{A})\cos(\widehat{B})\right) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})
 \end{aligned}$$

On retrouve bien encore le résultat voulu

7. Dans le triangle ABH rectangle en H on a $HB^2 + HA^2 = AB^2$

$$\text{Or } HA^2 = h^2 = b^2 \sin(\widehat{C})^2$$

et comme le point $H \in [B, C]$ on a donc $BH = BC - HC = a - b \cos(\widehat{C})$

d'où $BH^2 = a^2 + b^2 \cos(\widehat{C})^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$ et finalement

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= b^2 \sin(\widehat{C})^2 + a^2 + b^2 \cos(\widehat{C})^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \\
 &= a^2 + b^2 \left(\sin(\widehat{C})^2 + \cos(\widehat{C})^2\right) - 2ab \cos(\widehat{C}) \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question 6. (i.e. la formule d'Al-Kashi)

Corrigé de l'exercice 4

1. Deux exemples

(a) Notons $\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

φ est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est bien un cône positif.

Soit $t > 0$, alors $\varphi(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t\varphi(x, y)$. Ainsi φ est 2-homogène.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Ainsi

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 2y^2 = 2\varphi(x, y)$$

Ainsi φ vérifie l'équation ($\mathcal{E}_2$).

(b) Soit $\Delta_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $t > 0$, on a donc $y \neq 0$. Alors $ty \neq 0$ et donc $(tx, ty) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Ainsi Δ_1 est un cône positif.

De plus, comme $t > 0$

$$f(tx, ty) = \frac{1}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} \arctan\left(\frac{tx}{ty}\right) = \frac{1}{|t|\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = t^{-1} f(x, y)$$

Ainsi f est -1 -homogène.

(c) Pour $(x, y) \in \Delta_1$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y - x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x - y \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{xy - x^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-xy - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-(x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{(y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{y^2 + x^2}} \\ &= -f(x, y) \end{aligned}$$

Ainsi f vérifie bien l'équation $(\mathcal{E}_{-1})$ sur Δ_1 .

2. Il s'agit de la règle de la chaîne, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

3. *Première implication*

Soit f une fonction α -homogène sur Δ un cône positif et $(x_0, y_0) \in \Delta$. On pose $g : t \mapsto t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0)$

(a) Par α -homogénéité, on a, pour $t > 0$

$$g(t) = t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0) = t^{-\alpha} t^{\alpha} f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

Ainsi g est constante et vaut $f(x_0, y_0)$.

(b) D'après la question 2. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $t > 0$ on a

$$g'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} f(tx_0, ty_0) + t^{-\alpha} \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) \right)$$

Or g est constante, ainsi $g'(t) = 0$ et donc

$$\forall t > 0, \quad t^{-\alpha} \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) \right) = \alpha t^{-\alpha-1} f(tx_0, ty_0)$$

(c) En évaluant la relation précédente en $t = 1$ on obtient

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \alpha f(x_0, y_0)$$

Ceci étant vrai pour tout $(x_0, y_0) \in \Delta$ on en déduit que f vérifie $(\mathcal{E}_{\alpha})$.

4. Seconde implication

(a) La calcul a déjà été fait précédemment, on a

$$\forall t > 0, \quad g'(t) = -\alpha t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0) + t^{-\alpha} \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) \right)$$

Or, f vérifie $(\mathcal{E}_\alpha)$, ainsi

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(tx_0, ty_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(tx_0, ty_0) = \alpha f(tx_0, ty_0)$$

D'où

$$\forall t > 0, \quad g'(t) = -\alpha t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0) + \alpha t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0) = 0$$

On en déduit que, pour tout $t > 0$, $g'(t) = 0$.

g est une fonction dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc g est constante sur $]0, +\infty[$

Il est important d'être sur un intervalle pour conclure. Par exemple la fonction $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$, elle est constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais ne prend pas la même valeur sur ces intervalles.*

(b) g est constante donc en particulier, pour tout $t > 0$ $g(t) = g(1)$, c'est-à-dire

$$\forall t > 0, \quad t^{-\alpha} f(tx_0, ty_0) = f(x_0, y_0)$$

Et donc

$$\forall t > 0, \quad f(tx_0, ty_0) = t^\alpha f(x_0, y_0)$$

Ceci étant valable pour tout $(x_0, y_0) \in \Delta$ on en déduit que f est α -homogène sur Δ .

5. Par double implication on a montré que

$$f \text{ est } \alpha\text{-homogène} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

6. (a) On sait que

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

En dérivant cette relation par rapport à x on obtient

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

D'où

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

De même

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont $(\alpha - 1)$ -homogènes.

(b) Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont $(\alpha - 1)$ -homogènes elles vérifient l'équation $(\mathcal{E}_{\alpha-1})$, ainsi

$$(E_x) : \quad \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) = (\alpha - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$(E_y) : \quad \forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = (\alpha - 1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ le théorème de Schwarz nous assure que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et donc, en considérant $x(E_x) + y(E_y)$ on obtient

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = (\alpha - 1) \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Or f est α -homogène, donc

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \Delta, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha(\alpha - 1)f(x, y)}$$

(c) Considérons la fonction $h : (x, y) \mapsto x + y + 1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a alors

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Ainsi

$$\forall (x, y) \in \Delta, \quad x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 1 \times (1 - 1) \times h(x, y)$$

h vérifie $(\tilde{\mathcal{E}}_1)$ mais h n'est pas 1-homogène.

Finalement $\boxed{\text{une fonction qui vérifie } (\tilde{\mathcal{E}}_\alpha) \text{ n'est pas nécessairement } \alpha\text{-homogène.}}$